5-デザインについて (実験配置の理論と応用)

景山, 三平

数理解析研究所講究録
404巻 1980年 1-7

5-デザインについて

広大 学校教育 景山三平

5-(v, k, λ) design について次の2つの結果を述べる。

［定理1］ $v \geqq 2k$ なる 5-design のブロック数 b は $b \geqq v(v-1)$ をみたす。

［定理2］ 5-$(12, 6, 1)$ design は $b = v(v-1)$ をみたす唯一つの 5-design である（補構造を除いて）。

Ray-Chaudhuri and Wilson [4] は $v \geqq k+3$ なる 5-design に対して $b \geqq (v-1)(v-2)$ を示し，最近 Carmony [1] は $b = (v-1)(v-2)$ なる 5-design は存在しないことを示した。また Kageyama [2] は $v \geqq k+2$ なる 5-design に対して $b \geqq v(v-1)(v-2)/(2k)$ を示している。ここでの定理は これら不等式の改良と特徴づけを与えている

t-design の complement も t-design であるので $v \geqq 2k$ の範囲で考察することにする。 以下，証明を与える。

一般に 5-(v, k, λ_5) design に対して

$b = \lambda_5 v(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)/[k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)]$ が成り立つ。 先ず Kageyama の不等式より次を得る。

<u>補題</u>: $v \geqq 2k+2$ に対して $b \geqq v(v-1)$ が成り立つ。

(定理1の証明)

補題より 定理は $v=2k, v=2k+1$ のときのみに示せば十分である。

【$v=2k$ の場合】 このとき $\lambda_2 = r(k-1)/(2k-1)$ で $(k-1, 2k-1)=1$ より $r = l(2k-1)$ なる自然数 l が存在する。 5-design のパラメータは $b = 2l(2k-1)$, $\lambda_2 = l(k-1)$, $\lambda_3 = \frac{l(k-2)}{2}$, $\lambda_4 = \frac{l(k-2)(k-3)}{2(2k-3)}$, $\lambda_5 = \frac{l(k-3)(k-4)}{4(2k-3)}$ で与えられる。 今 $b \geqq v(v-1) \Longleftrightarrow l \geqq k$ より $l \geqq k$ を示す。 $2\lambda_4$ の整数性と $(k-2, 2k-3)=1$ より

(1) $\dfrac{l(k-3)}{2k-3}$ は 整数 である。

$(k-3, 2k-3) \leqq 3$ より 次の3つの場合に分けて考える。

<u>(i)</u> $(k-3, 2k-3)=1$: (1) より $l \geqq 2k-3 > k$ ($\because k \geqq 5$). 即ち $l > k$ ($\Longleftrightarrow b > v(v-1)$) が成り立つ。

(ii) $(k-3, 2k-3)=2$： (1) より $\ell \geqq k-3/2$．そこで $\ell = k-1$ のとき $2\lambda_4$ は非整数となる。よって $\ell \geqq k$。

(iii) $(k-3, 2k-3)=3$： $k-3=3a_1$, $2k-3=3a_2$, $(a_1, a_2)=1$ $(a_1, a_2$：自然数$)$． (1) より

$$(2) \qquad \frac{\ell a_1}{a_2} \text{ は整数である。}$$

よって $\ell \geqq a_2 = 2k/3-1$． 今 $\ell = a_2$ とすると，

$$(3) \qquad 2k = 3(\ell+1)$$

を得る。関係 $\lambda_3 = \ell(k-2)/2$ と $k=3(a_1+1)$ (奇数) は $\ell = \text{even}$ を意味する。これは (3) に矛盾する。よって $\ell \neq a_2$。このとき (2) より $\ell \geqq 2a_2 = 4k/3-2 \geqq k$ ($\because \ell$ は整数, $k \geqq 5$)。このように $v=2k$ のとき $\ell \geqq k$ ($\Leftrightarrow b \geqq v(v-1)$) が成り立つ。

【$v=2k+1$ の場合】 このとき $r = bk/(2k+1)$ より $b = \ell(2k+1)$ なる自然数 ℓ が存在する。5-design のパラメータは $r = \ell k$, $\lambda_2 = \dfrac{\ell(k-1)}{2}$, $\lambda_3 = \dfrac{\ell(k-1)(k-2)}{2(2k-1)}$, $\lambda_4 = \dfrac{\ell(k-2)(k-3)}{4(2k-1)}$, $\lambda_5 = \dfrac{\ell(k-2)(k-3)(k-4)}{4(2k-1)(2k-3)}$ となる。今 $b \geqq v(v-1) \Leftrightarrow \ell \geqq 2k$ より $\ell \geqq 2k$ を示すことにする。$2\lambda_3$ の整数性と $(k-1, 2k-1)=1$ より

$$(4) \qquad \frac{\ell(k-2)}{2k-1} \text{ は整数である。}$$

$(k-2, 2k-1) \leqq 3$ より 可能性のある2つの場合に分けて考える。

<u>(i)</u> $(k-2, 2k-1)=1$: (4) より $l \geqq 2k-1$. 先ず $l=2k-1$ のとき $l_5=(k-2)(k-3)(k-4)/[4(2k-3)]$。また $(k-2, 2k-3)=1$, $(k-3, 2k-3) \leqq 3$, $(k-4, 2k-3) \leqq 5$ が成り立つ。そこで $4l_5$ の整数性, $2k-3$ が奇数, $k-3, k-4$ が連続2整数より $(k-3, 2k-3)=3$ で $(k-4, 2k-3)=5$ の場合の~~み~~該当となる。これは $k=9$ を意味するが $l_4=21/2$ となり 結局 $l \geqq 2(2k-1) > 2k$ を示す。

<u>(ii)</u> $(k-2, 2k-1)=3$ ($\Leftrightarrow$ $k-2=3f_1$, $2k-1=3f_2$, $(f_1, f_2)=1$): (4) より

(5) $\dfrac{lf_1}{f_2}$ は整数である。

これより $l \geqq f_2=(2k-1)/3$。

<u>(a)</u> $l=(2k-1)/3$ のとき; $12l_5$ の整数性と $(k-2, 2k-3)=1$ より $(k-3)(k-4)/(2k-3)$ は整数となる。(i) と同様にして $k=9$ を得る。これは $l=17/3$ (非整数) で (5) より $l \geqq 2f_2=2(2k-1)/3$ を導く。

<u>(b)</u> $l=2(2k-1)/3$ のとき; $6l_5$ の整数性と $(k-2,$

$2k-3)=1$ より $(k-3)(k-4)/(2k-3)$ は整数になる。(a) と同様にして $k=9$ で $\ell=34/3$（非整数）となるので (5) より再び $\ell \geqq 3f_2 = 2k-1$ となる。

(c) $\ell=2k-1$ のとき；$4\lambda_5$ の整数性と $(k-2, 2k-3)=1$ より $(k-3)(k-4)/(2k-3)$ は整数である。(a) と同様にして $k=9$ で $\ell=17$ を与える。このとき $\lambda_4=21/2$（非整数）となる。よって $\ell > 2k$ $(\Longleftrightarrow b > v(v-1))$ となる。

（定理2の証明）

補題より $v=2k+2, 2k+1, 2k$ のときのみに $b=v(v-1)$ なる 5-design を考えればよい。先ず $b=v(v-1)$ をみたす 5-design のパラメータは

$$r=k(v-1),\ \lambda_2=k(k-1),\ \lambda_3=\frac{k(k-1)(k-2)}{v-2},$$

$$\lambda_4=\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{(v-2)(v-3)},\ \lambda_5=\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{(v-2)(v-3)(v-4)}$$

となる。

【$v=2k+2$ の場合】 $(2k-1, k-1)=1$, $(2k-1, k-2)\leqq 3$, $(2k-1, k-3)\leqq 5$, $2k-1$ は奇数 等より $2\lambda_4$ の整数性は $(2k-1, k-2)=3$, $(2k-1, k-3)=5$ を導き、$k=8$ を示す。このとき 5-(18, 8, 2) design の非存

在性は Kramer [3] より示されている。

【$v=2k+1$ の場合】 λ_3 は常に非整数（$k\geq 3$ に対して）となる。

【$v=2k$ の場合】 $(2k-3, k-2)=1$, $(2k-3) \mid k(k-3)$, $(k, 2k-3)\leq 3$, $(k-3, 2k-3)\leq 3$ より λ_4 の整数性は $(k, 2k-3)=3$, $(k-3, 2k-3)=3$ を導く。これは $k=6$ を示すし $\lambda_5=1$ となる。このとき 5-(12, 6, 1) design は存在し一意的であることは Witt [5] で知られている。

本稿の定理1，2は Carmony [1] による公開問題に対する完全な解答を与えている。

参考文献

[1] L. A. Carmony (1978). Tight (2t+1)-designs. Utilitas Math. 14, 39–47.

[2] S. Kageyama (1975). Note on an inequality for tactical configurations. Ann. Inst. Statist. Math. 27, 529–530.

[3] E. S. Kramer (1975). Some t-designs for $t\geq 4$ and $v=17, 18$. Proc. Sixth Southeastern Conf.

on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1975), pp. 443–460.

[4] D.K. Ray-Chaudhuri and R.M. Wilson (1975). On t-designs. Osaka J. Math. 12, 737–744.

[5] E. Witt (1938). Über Steinersche Systeme. Abh. Math. Sem. Hamb. 12, 265–275.